19/10/16

ΟΡΙΣΜΟΣ: $A - B = \{x : x \in A \land x \notin B\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $A^c = \{x : x \in \Omega \land x \notin A\} = \Omega - A$

$\Gamma - (A \cap B) = (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$

Για $x \in \Gamma - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in \Gamma \land x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \Gamma \land \sim x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \Gamma \land [\sim x \in A \lor \sim x \in B]$

$\Leftrightarrow x \in \Gamma \land [x \notin A \lor x \notin B]$

Τι συμβαίνει για $\Gamma - (A \cap B) = \emptyset$

$\Leftrightarrow (x \in \Gamma \land x \notin A) \lor (x \in \Gamma \land x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in (\Gamma - A) \lor x \in (\Gamma - B)$

$\Leftrightarrow x \in (\Gamma - A) \cup (\Gamma - B)$

Για $\Omega = \Gamma$ έχουμε $\Omega - (A \cap B) = (\Omega - A) \cup (\Omega - B)$

$\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ || $A - B = A \cap B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Απόδειξη για σπίτι

→ $\Gamma - (A \cup B) = (\Gamma - A) \cap (\Gamma - B)$

ΑΣΚΗΣΗ: $\left[(A \cap B) \subseteq \Gamma^c \text{ και } A \cup \Gamma \subseteq B\right] \Rightarrow A \cap \Gamma = \emptyset$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \subseteq B$

$\Rightarrow x \in B$

άρα $x \in A \cap B \Rightarrow x \in \Gamma^c$

$\Rightarrow x \notin \Gamma$

Επομένως $A \cap \Gamma = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A)$

→ $A \dot{-} B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

$= \left[A \cap (A^c \cup B^c)\right] \cup \left[B \cap (A^c \cup B^c)\right] =$

$= \left[\underbrace{(A \cap A^c)}_{\emptyset} \cup (A \cap B^c)\right] \cup \left[(B \cap A^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset}\right]$

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A)$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνονται οι σχέσεις: $A \subseteq (B \cup \Gamma)^c$, $B \subseteq (\Gamma \cup A)^c$, $\Gamma \subseteq (A \cup B)^c$

(α) Δύο οποιεσδήποτε σχέσεις απ' αυτές συνεπάγονται την τρίτη

Υποθέτουμε ότι $A \subseteq (B \cup \Gamma)^c$ κ $B \subseteq (A \cup \Gamma)^c$

Θα αποδείξω ότι $\Gamma \subseteq (A \cup B)^c$

Ας είναι $x \in \Gamma$. Αρκεί ν.δ.ο. $x \in (A \cup B)^c$, δηλ $x \notin A \cup B$
δηλ $x \notin A \wedge x \notin B$

Αν $x \in A$ τότε $x \in (B \cup \Gamma)^c = B^c \cap \Gamma^c$
δηλ. $x \in \Gamma^c \Rightarrow x \notin \Gamma$ άτοπο!
Άρα $x \notin A$

Αν $x \in B$ τότε $x \in (A \cup \Gamma)^c = A^c \cap \Gamma^c \Rightarrow$
$x \notin \Gamma$, άτοπο!

Άρα $x \notin B$

Επομένως $x \in \Gamma \Rightarrow x \in A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(β) Δύο οποιεσδήποτε σχέσεις είναι ικανές και αναγκαίες και αρκεί να είναι συνθήκες ώστε τα σύνολα A, B, Γ να είναι ανά δύο ξένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δυναμοσύνολο του συνόλου Α καλείται το σύνολο που απαρτίζεται από (όλα) τα υποσύνολα του Α (Συμβ $P(A)$)

Παράδειγμα: $A = \{1, x\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{x\}, A\}$$

$\rightarrow P(A) \neq \emptyset$

$B = \{a, x, \clubsuit\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{x\}, \{\clubsuit\}, \{a, x\}, \{a, \clubsuit\},$
$\{x, \clubsuit\}, B\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(P(\{0\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\},$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: i) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

ii) $A \neq B \Rightarrow P(A) \neq P(B)$

iii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$

iv) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

v) $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$

i) Υποθ. ότι $A \subseteq B$

αν $X \in P(A)$ τότε $\left.\begin{matrix} X \subseteq A \\ \text{και } A \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \subseteq B$

δηλ. $X \in P(B)$

άρα $P(A) \subseteq P(B)$

v) $X \in P(A) \cup P(B$

$\Rightarrow X \in P(A) \vee \in P(B)$

$\Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow X \in P(A \cup B)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΙΣΟΤΗΤΑ!

(δηλ. δεν ισχύει πάντα $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$)

Αντιπαράδειγμα: $A = \{a, \beta\}$, $B = \{a, \gamma\}$, $A \cup B = \{a, \beta, \gamma\}$

είναι $A \cup B \in P(A \cup B)$ / $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\beta\}, \{a, \beta\}\}$

αλλά $A \cup B \notin P(A)$

▷ $\mathcal{A}$: συλλογή συνόλων

Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ είναι σύνολα (με στοιχεία από το σύνολο αναφοράς Ω)

$\cup\mathcal{A}$: ένωση όλων των συνόλων που ορίζονται στο $\mathcal{A}$.

Παράδειγμα: $\mathcal{A} : \{[-r, r] : r\ (0,1]\}$